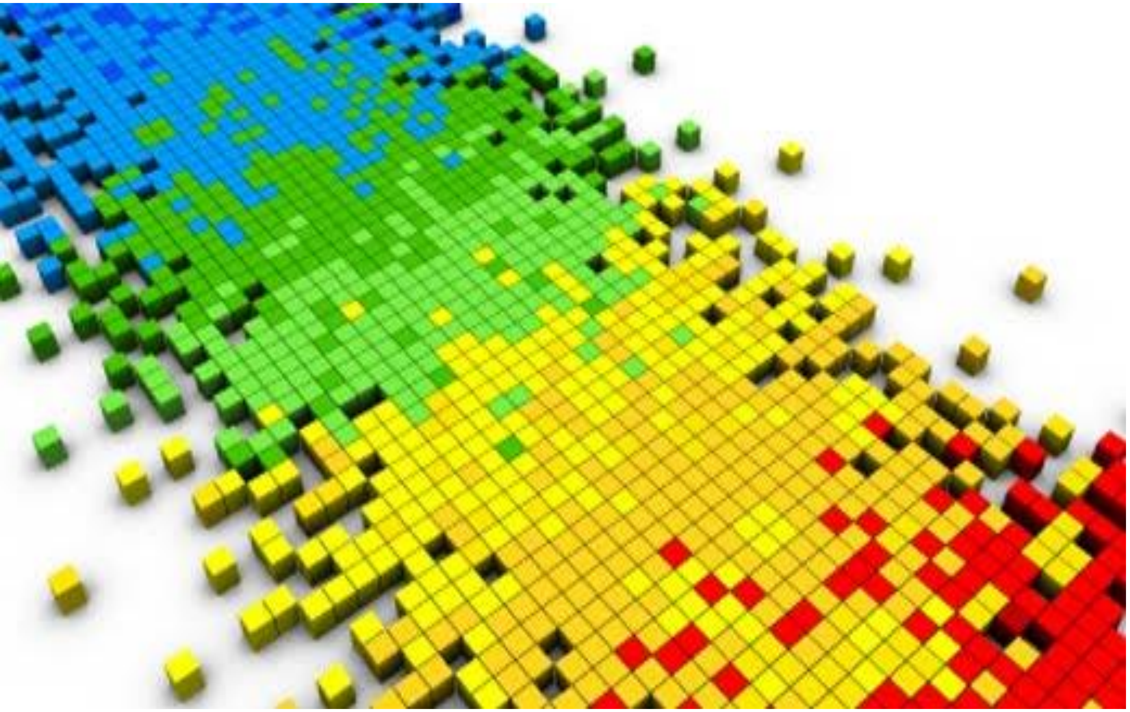

Cálculo Numérico

Prof. Guilherme Amorim
26/11/2013

Aula 11 – Sistemas de Equações Lineares / Parte 4
Convergência e Sistemas mal-condicionados

UFPE
Centro de Informática U·F·P·E

Aula passada...

- Métodos Iterativos
  - Jacobi

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}$$

  - Gauss-Seidel

$$x_i^{(k+1)} = \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] \Big/ a_{ii}$$

Pergunta...

- Como garantir (ou verificar) que as soluções através dos métodos e Jacobi e Gauss-Seidel convergem?
- Como verificar se pequenas alterações nos coeficientes levam a variações nos resultados do sistema?
- Hoje, vamos estudar:
  - Convergência de métodos iterativos
  - Sistemas mal-condicionados

Convergência

- Considerando o sistema de equações lineares na forma:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$

- Como garantir a convergência?

Revisão – Normas de Vetores

- Dado um espaço vetorial V, a norma é uma função que satisfaz aos seguintes postulados:
  - $||x|| > 0 \; se \; x \neq 0 \; e \; ||x|| = 0 \; se \; x = 0$
  - $||\lambda x|| = |\lambda|. ||x|| \; se \; \lambda \in \mathbb{R}$
  - $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| se \; x, y \in V$
    - Desigualdade triangular.
- A norma é uma medida do vetor no espaço

Revisão – Normas de Vetores

- Norma Euclidiana
  - $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$
- Norma do Máximo
  - $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$
- Norma da soma
  - $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- E no caso de matrizes?

Revisão – Normas de Matrizes

Definição 3.3: A norma de uma matriz A $n \times n$ é um número real não negativo denotado por $||A||$, associado com A, tal que:

1) $||A|| > 0$, se $A \neq 0$ e $||A|| = 0$ se $A = 0$;

2) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$;

3) $||KA|| \leq |K| \times ||A||$, $K \in \mathbf{R}$;

4) $||A \times B|| \leq ||A|| \times ||B||$;

Se uma norma matricial e uma norma vetorial estão relacionadas de tal modo que:

5) $||A\,x|| \leq ||A|| \times ||x||$, seja satisfeita para qualquer A e x, então as duas normas são ditas serem consistentes.

Revisão – Normas de Matrizes

Definição 3.4: As normas matriciais associadas às normas vetoriais 1, 2 e ∞ são:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(Soma máxima absoluta por coluna)}$$

$$\|A\|_2 = \{\text{autovalor máximo de } A^T A\}^{1/2} \qquad \text{(Norma espectral)}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(Soma máxima absoluta por linha)}$$

Revisão – Diagonal Estritamente Dominante

Definição 3.1: Uma matriz $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ é de diagonal estritamente dominante, se ela satisfaz pelo menos uma das seguintes condições:

a) por linha

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

ou

b) por coluna

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

Exemplo

- $$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$
  - é uma matriz diagonal estritamente dominante por linha
- $$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & 3 & -10 \end{pmatrix}$$
  - é uma matriz diagonal estritamente dominante por coluna

Revisão - Autovalores

Definição 3.2: Dada uma matriz $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, dizemos que seus autovalores são as raízes do polinômio característico dela, denotado por $\rho(\lambda)$, obtido de

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

- Isto é, $\det(A - \lambda I) = 0$

Exemplo

- Calcular os autovalores da matriz A
- $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$
- $\det(A - \lambda I) = 0$
  - $(4 - \lambda)(1 - \lambda) - 10 = 0$
    - $\lambda_1 = -1$
    - $\lambda_2 = 6$

Convergência (voltando...)

- Considerando o sistema de equações lineares na forma:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$

- Como garantir a convergência?

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \\ x = Bx + c \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)} - x = B\left(x^{(k)} - x\right)$$

$$\Rightarrow e^{(k+1)} = B\,e^{(k)}$$

Convergência

$$\| e^{(k+1)} \|_1 = \| B e^{(k)} \|_1 \leq \| B \|_1 \| e^{(k)} \|_1$$

Da propriedade 5

$$\| B \|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} | B_{ij} | = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left| -\frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right|$$

Da aula passada

Se B é de diagonal estritamente dominante, temos:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| < 1 \quad ; \; j = 1, 2, \ldots, n$$

Logo: $\| B \|_1 \leq \rho < 1$

Convergência

- Considerando a norma da soma dos vetores:

$$\|e^{(k+1)}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |e_i^{(k+1)}| \qquad \|e^{(k)}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |e_i^{(k)}|$$

$$\Longrightarrow \|e^{(k+1)}\|_1 = \|Be^{(k)}\| \leq \|B\|_1 \, \|e^{(k)}\|_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} |e_i^{(k+1)}| \leq \rho \sum_{i=1}^{n} |e_i^{(k)}|$$

- Recursivamente:

$$\sum_{i=1}^{n} |e_i^{(k+1)}| \leq \rho^{(k+1)} \sum_{i=1}^{n} |e_i^{(0)}|$$

E como: $0 < \rho < 1$

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |e_i^{(k+1)}| = 0}$$

Teorema 3.2

Teorema 3.2

Se $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ *é uma matriz não singular, de diagonal estritamente dominante, então o método de Gauss-Seidel converge para a solução do sistema de equações lineares* $Ax = b$, *e a convergência é pelo menos tão rápida quanto para o método de Jacobi, para qualquer vetor aproximação inicial* $x^{(0)}$.

- Matriz não-singular: determinante não-nulo.
- Demonstração em [4]

Exemplo

- Questão de Prova (2013.1)

Questão 2 (3,0 pontos): Considere o seguinte sistema linear:

$$6x_2 + 16x_3 = 18$$
$$12x_1 + 8x_2 = 23$$
$$-10x_1 - 13x_2 + 2x_3 = -24$$

Verifique se é possível estabelecer uma condição suficiente para garantir a convergência do método de Gauss-Seidel para computar a solução do sistema. Caso seja possível, utilize o método de Gauss-Seidel, aplicando-o na configuração com garantia de convergência, para determinar a solução aproximada do sistema. **Parta do vetor inicial** $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right) = (1,1,1)$ **e faça iterações até que, após a *k*-ésima iteração tenha-se a condição de parada** $\max_{1 \leq i \leq 3} \left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| < 0.05$ **satisfeita**. Caso não seja possível estabelecer uma condição suficiente de convergência, utilize o método direto de decomposição LU para resolver o sistema.

Exemplo (Resposta)

- A matriz A é de diagonal estritamente dominante?
  - Não...
  - 0<6+16 (não é pelo critério das linhas)
  - 0<12+10 (nem pelo das colunas)

$$
\begin{aligned}
6x_2+16x_3&=18\\
12x_1+8x_2&=23\\
-10x_1-13x_2+2x_3&=-24
\end{aligned}
$$

$$
A=\begin{pmatrix} 0 & 6 & 16 \\ 12 & 8 & 0 \\ -10 & -13 & 2 \end{pmatrix}
$$

Exemplo (Resposta)

- Mas, poderíamos escalonar o sistema para:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 0 \\ -10 & -13 & 2 \\ 0 & 6 & 16 \end{pmatrix}$$

- Nesse caso, a matriz A é de diagonal estritamente dominante por linha e por coluna.
  - Porém, é importante salientar que basta que A seja de diagonal estritamente dominante apenas por linha ou apenas por coluna
- Logo, podemos garantir a convergência.
  - Deixamos o restante da questão como exercício.

Teorema 3.3

Teorema 3.3

A iteração $x^{(k+1)} = Dx^{(k)} + c$ convergirá para qualquer escolha do vetor inicial $x^{(0)}$ se, e somente se, os autovalores da matriz D forem todos, em módulo, menores que 1.

- Demonstração em [5]

Teorema 3.2

- “Devemos salientar que as condições apresentadas no Teorema 3.2 são suficientes e não necessárias. ”
- “O que significa dizer que se tais condições não forem satisfeitas, nada se pode afirmar pois uma das seguintes situações pode ocorrer:”
  - Não converge por nenhum dos métodos (Jacobi / Gauss-Seidel)
  - Converge por um deles e diverge pelo outro
  - Converge por ambos os métodos

Sistemas Mal-Condicionados

- “Um sistema de equações lineares é dito ser mal-condicionado se sua solução é muito sensível às pequenas mudanças em algum ou alguns coeficientes das equações.”

Exemplo 3.7

Exemplo 3.7 - Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 1{,}00x_1 + 1{,}00x_2 = 2{,}00 \\ 1{,}01x_1 + 1{,}00x_2 = 2{,}01 \end{cases}$$

solução é dada pelo vetor $\boldsymbol{x} = \{ (1{,}00;\ 1{,}00)^T \}$.

Entretanto, se o coeficiente de $\boldsymbol{x}_1$, na segunda equação, for 1,0001 ao invés de 1,01, isto é, se tivermos o sistema

$$\begin{cases} 1{,}00x_1 + 1{,}00x_2 = 2{,}00 \\ 1{,}0001x_1 + 1{,}00x_2 = 2{,}01 \end{cases}$$

a solução passa a ser o vetor $\boldsymbol{x} = \{ (100;\ -98)^T \}$.

Exemplo 3.7

- Esse exemplo mostra a instabilidade do sistema, pois, alterando apenas um de seus coeficientes em 0,099, sua solução foi multiplicada por aproximadamente um fator 100 (em módulo).
- Importante notar que, geralmente, os coeficientes das equações não são conhecidos exatamente. Podem ter sido obtidos de arredondamento, experimento, modelagem matemática, etc. Logo, possivelmente imprecisos.

Pergunta

- Como reconhecer se um sistema de equações lineares é mal-condicionado?
- “A resposta a essa questão é bastante complexa. Um estudo sobre alguns critérios de de identificação de mal-condicionamento de sistemas é apresentado em [6]”

Algumas critérios que podem caracterizar o mal-condicionamento:

- Pequeno valor do determinante da matriz dos coeficientes;
- Pequeno valor do determinante normalizado da matriz dos coeficientes;
- Grandes valores dos elementos da matriz inversa dos coeficientes do sistema em estudo;
- Número de condição.

Definição 3.5

Definição 3.5: O determinante normalizado de uma matriz quadrada A é definido como

$$\textbf{norma } |A| = \frac{|A|}{\alpha_1 \times \alpha_2 \times \alpha_3 \times \ldots \times \alpha_n}$$

Onde

$$\alpha_k = (a_{k1}^2 + a_{k2}^2 + \cdots + a_{kn}^2)^{1/2}$$

com $\boldsymbol{k} = 1, 2, \ldots, n$.

Definição 3.6

Definição 3.6: O número de condição de uma matriz não singular $\boldsymbol{A}$, denotado por $\boldsymbol{cond(A)}$ ou $\boldsymbol{K(A)}$ é dado por $\boldsymbol{cond(A)} = \boldsymbol{K(A)} = ||A|| \times ||A^{-1}||$ para qualquer norma.

Este número de condição é comumente usado para identificar se um sistema de equações lineares é mal-condicionado, isto é, se $\boldsymbol{cond(A)}$ ou $\boldsymbol{K(A)}$ for "muito grande" (lamentavelmente não há meio de especificar esta grandeza), o sistema $\boldsymbol{Ax = b}$ é mal-condicionado.

Exemplo 3.9

Exemplo 3.9 - Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 1{,}2969\,x + 0{,}8648\,y = 0{,}8642 \\ 0{,}2161\,x + 0{,}1441\,y = 0{,}1440 \end{cases}$$

Temos que:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1{,}2969 & 0{,}8648 \\ 0{,}2161 & 0{,}1441 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0{,}8642 \\ 0{,}1440 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3.9

- $A^{-1} = ?$
- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
- $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- Logo, se $A = \begin{pmatrix} 1{,}2969 & 0{,}8648 \\ 0{,}2161 & 0{,}1441 \end{pmatrix}$, temos:
- $A^{-1} = 10^8 \begin{pmatrix} 0{,}1441 & -0{,}8648 \\ -0{,}2161 & 1{,}2969 \end{pmatrix}$

Exemplo 3.9

- Calculando o valor das normas matriciais:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le 2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}| =$$

$$= \max \{1{,}2969 + 0{,}8648 \; ; \; 0{,}2161 + 0{,}1441\}$$

$$= 2{,}1617$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max_{1 \le i \le 2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}^{(-1)}|$$

$$= \max \{1{,}0089 \times 10^8 \; ; \; 1{,}5130 \times 10^8\}$$

$$= 1{,}5130 \times 10^8$$

Exempo 3.9

- Logo, calculando o valor no número de condição K(A), temos:

$$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = 2{,}1617 \times 1{,}5130 \times 10^{8}$$

$$\Rightarrow K(A) = 3{,}27 \times 10^{8}$$

- Logo, podemos afirmar que o sistema é mal-condicionado.
- Notar que utilizamos os valores das normais matriciais associadas à norma vetorial ∞.

Bibliografia

- [1] Silva, Zanoni; Santos, José Dias. Métodos Numéricos, 3ª Edição. Universitária, Recife, 2010.
- [2] Notas de aula do prof. Divanilson Campelo
- [3] Ruggiero, Márcia; Lopes, Vera. Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais, 2ª Edição. Pearson. São Paulo, 1996.
- [4] Hammerlin G. and Hoffman K. Numerical Mathematics, Stringer-Verlag, New York, 1991.
- [5] Albrecht P. Análise Numérica – Um curso Moderno, LTC, Rio de Janiero, 1973.
- [6] Santos J.D. Análise de Sistemas de Equações Lineares Mal-condicionados. Dissertação de Mestrado, Departamento de Informática, UFPE, Recife, 1981.